ONDAS ESTACIONÁRIAS - A CORDA VIBRANTE

<u>Material Utilizado</u>:

Parte B - Sistema 1D - Ondas Estacionárias Transversais

- um vibrador mecânico (PASCO SF-9324) com adaptador banana para cordas
- um gerador de funções com amplificador embutido (corrente de saída de 1 A) (PASCO PI-9587C)
- um estroboscópio (PASCO SF-9211)
- uma corda (PASCO SE-9409)
- duas garras de mesa
- uma polia
- uma haste (~ 50 cm)
- uma conjunto de massas (~ 100 g - 300 g) para tensionar a corda (PASCO ME-9348)
- uma balança (500 g)

<u>Objetivo do Experimento</u>: Investigar quantitativamente o estabelecimento de modos normais em sistemas (com uma e duas dimensões) com muitos graus de liberdade.

INTRODUÇÃO

Consideremos a oscilação livre de um sistema com várias partes móveis. A complexidade de um tal sistema pode ser avaliada pelo número N de *graus de liberdade* que o sistema possui, ou seja o número necessário de coordenadas para especificar de forma completa a configuração do sistema.

Um resultado muito importante para um sistema complexo (com um número arbitrário de graus de liberdade) é que seu movimento sempre pode ser descrito como uma superposição de movimentos mais simples, denominados *modos normais*, que ocorrem simultaneamente. Os modos normais são movimentos oscilatórios do sistema como um todo com propriedades similares a de um oscilador harmônico simples. Quando o sistema se move segundo qualquer um de seus modos, todas as suas partes móveis oscilam com a mesma dependência temporal cos $(\omega\, t + \varphi)$, a mesma frequência ω e constante de fase φ.

Um outro resultado importante é que para um sistema com N graus de liberdade, existem exatamente N modos normais. Cada modo é caracterizado por uma certa frequência ω e "forma", esta última dada pelas amplitudes relativas das diversas partes oscilantes. O movimento mais geral do sistema é uma superposição de todos os seus modos normais, com a amplitude e a constante de fase para cada modo determinadas pelas condições iniciais.

Certos sistemas são compostos de um número muito elevado de partes móveis, e caso estas estejam distribuídas em uma região limitada do espaço, a distância média entre partes móveis se torna muito pequena. Neste caso podemos tratar aproximadamente um tal sistema como um “contínuo”, imaginando que o número de partes móveis tende para infinito e que a distância média entre as mesmas tende a zero. Dentro de tal aproximação, o sistema possui infinitos graus de liberdade e, portanto, infinitos modos normais. Em certas condições sistemas como uma corda (de violão, por exemplo) ou uma membrana (de um tambor, por exemplo) podem ser tratados como contínuos, com boa aproximação. Os modos normais de um sistema contínuo são também denominados *ondas estacionárias*.

Como exemplos de sistemas (oscilantes) que podem ser tratados como contínuos, consideremos, uma corda (que pode oscilar transversalmente), uma mola espiral (que pode oscilar longitudinalmente), ou o ar em um tubo. Tais sistemas são unidimensionais (1D) no sentido de que as posições de equilíbrio de suas diversas partes móveis estão distribuídas ao longo de um eixo e caracterizadas por uma única coordenada z. Denotemos por ψ o a perturbação do sistema em certa posição e instante de tempo, relativamente a um valor de equilíbrio. Tal perturbação pode ser o deslocamento (transversal ou longitudinal) de uma certa parte móvel em relação à sua posição de equilíbrio (como numa corda ou numa mola) ou, no caso de ondas sonoras, tanto um tal deslocamento como a pressão, relativamente a um valor de equilíbrio. No caso geral, tal perturbação é função da coordenada z e do tempo t, e portanto, denotamos tal função por $\psi\,(z,t)$. O problema de obter a equação de movimento para cada parte deste sistema (veja a dedução em livros-texto padrão de Física de um curso universitário) leva à equação de onda

$$\frac{\partial^2\ \Psi\,(z,t)}{\partial t^2} = v^2\ \frac{\partial^2\ \Psi\,(z,t)}{\partial z^2} \qquad (1)$$

Na expressão acima v possui a dimensão de velocidade e é dada por

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \quad \text{(para ondas transversais numa corda)} \qquad (2a)$$

$$v = \sqrt{\frac{K_L L}{\rho_0}} \quad \text{(para ondas longitudinais numa mola)} \qquad (2b)$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma \; p_0}{\rho_0}} \quad \text{(para ondas sonoras)} \qquad (2c)$$

onde ρ_0 é a densidade linear de massa da corda ou mola e T_0 e $K_L\,L$ são a tensão na corda e na mola (de comprimento L e constante elástica K_L), respectivamente. Para o caso do som, p_0 e ρ_0 são a pressão e densidade de equilíbrio, respectivamente, e γ é a razão entre o calor específico a pressão constante e o calor específico a volume constante.

Para determinar os modos normais destes sistemas, procede-se da seguinte forma. Se o sistema movimenta-se segundo um de seus modos normais, então todas as suas partes oscilam com um movimento harmônico de mesma frequência ω e constante de fase φ. Neste caso $\psi\,(z,t)$ possui a mesma dependência temporal para todas as partículas, isto é, para todas as coordenadas z, e podemos escrever, como *forma mais geral de uma onda estacionária*

$$\psi\,(z,t) = A\,(z)\cos(\omega\,t + \varphi). \qquad (3)$$

A forma de $A\,(z)$ depende do modo, isto é, cada modo possui uma dependência espacial $A\,(z)$ característica. Entretanto, devido ao fato de que $\psi\,(z,t)$ deve ser uma solução da equação de movimento, resulta uma restrição sobre a forma de $A\,(z)$. De fato, substituindo a relação (3) na equação de movimento (1), obtém-se

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = -\,\frac{\omega^2}{v^2}\,A(z) = -\,k^2\,A(z), \qquad (4)$$

cuja solução geral é

$$A(z) = A\,\mathrm{sen}\,kz + B\cos kz.$$

Portanto a solução geral para o deslocamento dos sistemas 1D movendo-se segundo um único modo normal (onda estacionária) é dada por

$$\psi\,(z,t) = [A\,\mathrm{sen}\,kz + B\cos kz]\cos(\omega\,t + \varphi). \qquad (5)$$

Definindo $k = 2\pi\,/\,\lambda$, observamos que λ é a distância ao longo da qual se tem uma oscilação espacial completa, que é denominada por esta razão *comprimento de onda*. Substituindo esta última relação na equação (2) e dado que a frequência ν e a frequência angular ω estão relacionadas por $\omega = 2\pi\nu$, obtém-se

$$\lambda \, \nu = v. \qquad (6)$$

Tendo-se em conta as relações (2a), (2b) e (2c), observa-se que v assume um mesmo valor para todos os modos (ou seja, v independe de λ, A ou B).

A solução (5) é ainda bastante genérica, no sentido de que a mesma não leva em conta as *condições de contorno*, isto é, as restrições impostas às fronteiras do sistema. As amplitudes A e B são dependem de tais condições de contorno.

Denotemos por L a extensão dos sistemas 1D aqui tratados. Com uma escolha adequada da origem de coordenadas, especificamos o extremo esquerdo do sistema por $z = 0$ e seu estremo direito por $z = L$. Aqui consideraremos dois exemplos de condições de contorno comumente aplicáveis a sistemas 1D, e que descrevem razoavelmente bem situações que serão investigados nesta prática:

(i) <u>ambos os extremos do sistema encontram-se fixos</u>

Tais condições são expressas por $\psi\,(0,t) = 0$ e $\psi\,(L,t) = 0$. A condição

$$\psi\,(0,t) = B \cos\,(\omega\, t + \varphi) = 0$$

implica que $B = 0$, uma vez que $\psi\,(0,t)$ deve ser nula para todos os instantes de tempo t. Consequentemente,

$$\psi\,(z,t) = A \text{ sen } kz \;\cos\,(\omega\, t + \varphi).$$

A condição

$$\psi\,(L,t) = A \text{ sen } kL \;\cos\,(\omega\, t + \varphi) = 0$$

nos leva a sen $kL = 0$, uma vez que $\psi\,(L,t)$ deve ser nula para todos os instantes de tempo t e que não nos interessa escolher $A = 0$, que nos levaria a uma solução trivial correspondente à situação em que o sistema encontra-se todo ele em repouso permanente. Para fazer cumprir a relação sen $kL = 0$ é necessário exigir que $kL = n\,\pi$, onde n é um número inteiro qualquer. Na discussão deste exemplo podemos nos restringir a inteiros n não negativos, uma vez que os inteiros negativos não nos levaria a soluções fisicamente diferentes. Podemos também excluir $n = 0$, uma vez que tal escolha nos levaria a $\psi\,(z,t) = 0$, para todos os valores de z e t. Consequentemente os modos normais permitidos pelas condições de contorno acima mencionadas são descritos por

$$\psi\,(z,t) = A \text{ sen } k_n z \; \cos(\omega\, t + \varphi) \qquad (7a)$$

$$\text{com } \; k_n = n\,\pi\,/\,L, \;\text{ sendo } n = 1, 2, 3, ...$$

Os comprimentos de onda permitidos são então dados por $\lambda = \lambda_n = 2\pi \,/\, k_n = 2\,L \,/\, n$. Observe, portanto, que é n o número de semi-comprimentos de onda (λ / 2) compreendidos entre os extremos fixos do sistema (um semicomprimento de onda é a distância entre dois nós adjacentes). Em consequência da relação (6), segue que estes modos têm frequências dadas por $\nu = \nu_n = v \,/\, \lambda_n$, ou

$$\nu = n\,(v \,/\, 2L). \qquad (7b)$$

(ii) <u>um extremo do sistema é fixo e o outro livre.</u>

Tais condições são expressas por $\psi\,(0,t) = 0$ e $\left.\dfrac{\partial \Psi\,(z,t)}{\partial z}\right|_{z=L} = 0.$

(Para aceitar esta última relação, você pode considerar, por exemplo, as oscilações transversais de uma corda, para a qual a força transversal F_z é dada por $F_z = T_0 \dfrac{\partial \Psi\,(z,t)}{\partial z}$, onde é a tensão de equilíbrio, e no extremo livre deve-se ter $F_z = 0$.)

A condição

$$\psi\,(0,t) = B \cos(\omega\, t + \varphi) = 0$$

implica que $B = 0$, uma vez que $\psi\,(0,t)$ deve ser nula para todos os instantes de tempo t. Consequentemente,

$$\psi\,(z,t) = A \text{ sen } kz \; \cos(\omega\, t + \varphi).$$

A condição

$$\left.\frac{\partial \Psi\,(z,t)}{\partial z}\right|_{z=L} = kA \cos kL \; \cos(\omega\, t + \varphi) = 0$$

nos leva a $\cos kL = 0$, uma vez que $\left.\dfrac{\partial \Psi\,(z,t)}{\partial z}\right|_{z=L}$ deve ser nula para todos os instantes de tempo t e que não nos interessa escolher $k = 0$ ou $A = 0$, que nos levaria a uma solução trivial correspondente à situação em que o sistema encontra-se todo ele em repouso permanente. Para fazer cumprir a relação $\cos kL = 0$ é necessário exigir que $kL = (2n + 1)\, \pi / 2$, onde n é um número inteiro qualquer. Na discussão deste exemplo podemos nos restringir a inteiros n não negativos, uma vez que os inteiros negativos não nos levaria a soluções fisicamente diferentes. Consequentemente os modos normais permitidos pelas condições de contorno acima mencionadas são descritos por

$$\psi\,(z,t) = A \,\text{sen}\, k_n z \;\cos\,(\omega\, t + \varphi) \qquad \text{(8a)}$$

$$\text{com} \;\; k_n = (2n + 1)\frac{\;}{2L}\,, \;\; \text{sendo } n = 0, 1, 2, 3, ...$$

Os comprimentos de onda permitidos são então dados por $\lambda = \lambda_n = 2\pi / k_n = 4\,L / (2n + 1)$. Observe, portanto, que é há um múltiplo ímpar de um quarto de comprimento de onda ($\lambda / 4$) compreendidos entre os extremos do sistema. Em consequência da relação (6), segue que estes modos têm frequências dadas por $\nu = \nu_n = v / \lambda_n$, ou

$$\nu = (2n + 1)\,(v / 4L). \qquad \text{(8b)}$$

Desta forma as frequências permitidas (especificamente para as condições de contorno supracitadas) são múltiplas ímpares da frequência mais baixa $\nu_1 = (v / 4L)$ (denominada *fundamental*).

Como sugerido pelas expressões (7a) e (8a), ondas estacionárias possuem pontos de perturbação nula (*nós*) e pontos onde a perturbação vibra com amplitude máxima (*antinós*). No caso particular de ondas sonoras, a descrição do padrão ondulatório pode ser realizada tanto em termos de perturbações de posição (deslocamentos) de pequenos volumes de ar (em relação a uma posição de equilíbrio) quanto de perturbações de pressão (em relação a um valor de equilíbrio). Uma onda sonora estacionária possui nós e antinós de deslocamento ou de pressão. Em um tubo ressonante (que é um sistema 1D) deve ser compreendido que nós de pressão ocorrem em posições correspondentes a antinós de deslocamento e vice-versa (isto pode ser compreendido considerando um ponto intermediário entre dois antinós de deslocamento que vibram em oposição de fase. Quando o ar destes antinós de deslocamento movem-se num instante de aproximação mútua, a pressão no ponto intermediário é máxima; quando eles se afastam mutuamente, a pressão é mínima - portanto este ponto intemediário é um antinó de pressão). Neste experimento investigaremos duas confirgurações possíveis de um tubo ressonante: um *tubo aberto* (aberto em ambas as extremidades) e um *tubo fechado* (fechado em uma extremidade e aberto na outra). Uma extremidade fechada de um tubo ressonante constitui um nó de deslocamento (e um antinó de pressão) – o ar não pode se mover e a extremidade aberta constitui um antinó de deslocamento (e nó de pressão) – a pressão permanece praticamente fixa (no valor da pressão ambiente). A assertiva de que as extremidades de um tubo ressonante constituem nós ou antinós deve ser compreendida como uma aproximação, uma vez que o comportamento ondulatório nas extremidades de um tubo (particularmente na extremidade aberta) depende de fatores como o comprimento de onda do som e o diâmetro do tubo.

A análise do tópico modos normais em sistemas de dimensão mais elevada (2D ou 3D) não é conceitualmente mais difícil que para sistemas 1D. Entretanto, seu tratamento matemático (o desenvolvimento da equação de onda e a imposição de condições de contorno) é geralmente mais elaborado, uma vez que o problema envolve mais de duas variáveis (no espaço e tempo). Por esta razão, escolheremos apenas ilustrar esta discussão apresentando uma demonstração qualitativa de um sistema 2D. A demonstração será feita fazendo uso das *placas de Chladni*. As placas são excitadas por um oscilador (a força do oscilador é aplicada ao centro da placa enquanto as bordas da mesma vibram livremente - estas são as condições de contorno). Se a placa move-se segundo apenas um de seus modos normais, então um conjunto de pontos (os *nós*) ao longo da superfície da placa (resultando em linhas - as *linhas nodais*) permanecerá em repouso permanente, enquanto que os demais pontos da placa oscilam. A visualização das linhas nodais pode ser facilmente realizada espalhando sobre a superfície da placa oscilante uma quantidade suficiente de pó fino - o pó se concentrará sobre as linhas nodais. Se o movimento oscilatório da placa for complexo (isto é, uma superposição de vários modos normais), então, não haverá formação de linhas nodais (isto segue do fato de que linhas nodais de modos diferentes em geral não coincidem).

PROCEDIMENTO

Parte B - Ondas Estacionárias Transversais em Uma Corda

1. Trave o eixo do vibrador mecânico colocando a lâmina travadora (na parte superior do vibrador) na posição adequada (LOCK).

2. Introduza o adapatador banana para cordas no eixo do vibrador mecânico.

3. Meça a massa *m* da corda a ser utilizada na montagem e registre o seu valor. Para tensionar a corda escolha uma massa (a ser suspensa) *M* da ordem de 100 g. Na realidade meça *M* e registre o seu valor.

4. Amarre uma das extremidades da corda a uma haste vertical (fixa a uma garra de mesa, por exemplo) e a outra extremidade a uma massa. A corda deve ser montada horizontalmente, passando pelo adapatador banana (próximo à extremidade fixa à haste vertical) e por uma polia

(próximo à extremidade que segura a massa, que deverá permanecer suspensa). É importante não amarrar a corda diretamente ao eixo do vibrador mecânico, o que evitará que o mesmo seja submetido a uma força lateral, que poderia danificá-lo. Como acima explicado, a corda deve simplesmente ser colocada em contato com o adaptador banana fixo ao vibrador, passando por sua reentrância.

5. Meça (e anote) o comprimento total L_0 da corda. Meça (e anote) também o comprimento L da corda entre seus estremos fixos (isto é entre o adaptador banana e a polia).

6. Conecte o vibrador mecânico à saída (de baixa impedância) do gerador de funções.

7. Verifique a voltagem de operação do gerador de funções e conecte-o à rede.

8. Discuta (e confira) a montagem com seu professor.

9. Destrave o eixo do vibrador mecânico colocando a lâmina travadora na posição adequada (UNLOCK).

10. Coloque o potenciômetro seletor de amplitude do gerador de funções na posição de mínimo e a chave seletora de forma de sinais na posição correspondente a ondas senoidais. Ligue em seguida o gerador de funções.

11. Selecione um valor inicial de frequência aproximadamente igual a 10 Hz (escolha a faixa de frequência com resolução de 0,1 Hz). Gire gradualmente o potenciômetro seletor de amplitude até estabelecer uma amplitude não superior a 1 mm na parte da corda em contato com o eixo do vibrador. É importante minimizar a amplitude de oscilação desta extremidade para que considerá-la um nó possa ser uma aproximação aceitável.

12. É esperado que para várias frequências se estabeleça na corda uma onda estacionária, isto é, algumas partes da corda (nós) parecem estar em repouso, enquantro outras (anti-nós) oscilam rapidamente. Aumente gradualmente a frequência do gerador até que uma tal condição seja atingida. Anote os valores da frequência e do número n de semi-comprimentos de onda (entre os extremos da corda) na folha de resultados. Continue aumentando gradualmente a frequência até identificar pelo menos quatro outras ondas estacionárias, sempre anotando os valores de frequência e do número de semi-comprimentos de onda correspondentes.

13. Coloque o potenciômetro seletor de amplitude de sinais na posição de mínimo. Trave o vibrador mecânico (posicione a lâmina travadora na posição LOCK).

14. Aumente a massa M do corpo suspenso para o valor aproximado de 200 g. Meça M e anote o seu valor. Meça (e anote) o novo comprimento total L_0 da corda. Destrave o vibrador e repita as ações dos itens 11 e 12 para o novo comprimento da corda.

15. Repita as ações dos itens 13 e 14, mas desta vez para um corpo suspenso de massa M aproximadamente igual a 300 g.

16. De acordo com a teoria apresentada na INTRODUÇÃO, espera-se uma relação de proporcionalidade entre a frequência ν (da onda estacionária) e o número de semi-comprimentos de onda n (veja a relação (7)), para valores fixos de tensão T_0 e densidade linear de massa ρ_0 da corda. Construa gráficos ν versus n, para cada valor da massa suspensa M.

17. Verifique se as curvas experimentais ν versus n sugerem uma relação de linearidade. Caso isto ocorra, ajuste cada uma das curvas experimentais obtidas, propondo a dependência $\nu = A + B\, n$. Obtenha os parâmetros de ajuste B para cada curva.

18. Qual o significado físico do parâmetro B supracitado? Qual a sua conexão com a grandeza v (expressão (2a))?

19. Calcule os valores de v a partir da expressão (2a) (valor "teórico") e a partir de sua relação com o parâmetro de ajuste B (valor "experimental'), para cada um dos casos investigados (isto é, para cada valor de M). Comente o resultado obtido. Os cálculos, é claro, devem ser realizados com a propagação de erros apropriada, levando em conta as incertezas em todas as medidas pertinentes.

FOLHA DE DADOS E RESULTADOS

Experimento: Modos Normais – Sistemas 1D e 2D

Data____/____/____

COMPONENTES DO GRUPO
NOME ____
NOME ____
NOME ____
NOME ____

ONDAS ESTACIONÁRIAS TRANSVERSAIS EM UMA CORDA

Massa da corda: m = (_______±_____) g

Comprimento da corda (entre extremos fixos): L = (_______±_____) mm

Valores de Frequência e Número de Semi-Comprimentos de Onda Observados

L_0 (mm) =	M (g) =	L_0 (mm) =	M (g) =	L_0 (mm) =	M (g) =
n	ν(Hz)	n	ν(Hz)	n	ν(Hz)

M (g)	T_0 (N)	L_0 (cm)	ρ_0 (kg / m)	Parâmetro de Ajuste B ($\nu = A + B\,n$)	v (teórico) (m / s)	v (experimental) (m / s)